



O ENSINO E APRENDIZAGEM CONCATENADO DE INEQUAÇÕES, O CORPO DOS REAIS E LÓGICA MATEMÁTICA: UM PANORAMA

Karly Barbosa Alvarenga¹

6- Educação e Ensino de Ciências Exatas e Biológica

Resumo

Este trabalho apresenta um mapeamento de pesquisas apresentadas no *Psychology Mathematics Education* e no *Séminaries Franco-Italien de Didactique de l'Algèbra*. O enfoque está concentrado no ensino e na aprendizagem concatenada entre inequações, o conjunto dos números reais e lógica matemática e, por meio da abordagem teórico-metodológica da Análise de Conteúdo, levantamos e categorizamos dados que podem subsidiar futuras linhas de investigações. Os resultados indicam que esse enfoque teve pouca atenção dos pesquisadores, que o tema inequações está bem disseminado entre vários países, que os participantes das pesquisas de campo são de diversas nacionalidades, principalmente, da faixa etária entre 15 e 17 anos. No geral, as categorias foram: o tipo de pesquisa; os tipos de participantes: nacionalidade, idade, professor ou aluno, escolaridade; data da publicação; nível de concatenação entre os conceitos: ausente, superficial, médio, quase profundo.

Palavras-chave: inequações, lógica matemática, números reais

Abstract

This paper presents a mapping of the research presented in *Psychology Mathematics Education* and *Séminaries Franco-Italien de Didactique de l'Algèbra*. The focus is concentrated on concatenated teaching and learning between inequalities, the set of real numbers and mathematical logic, and through the theoretical and methodological approach of Content Analysis, we raise and categorize data that can support future lines of research. The results indicate that this approach has had little attention from researchers, the topic inequalities is well spread among several countries, that participants in the research field are of various nationalities, especially the age group between 15 and 17 years. Overall, the categories were: the type of research, the types of participants: nationality, age, teacher or student, school, date of publication, level of concatenation between the concepts: absent, shallow, medium, almost profound.

Key word: inequalities, mathematical logic, real numbers

Introdução

¹ Doutoranda em Educação Matemática. Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA , PUC – SP) e Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Ensino de Ciências (GPEMEC – UFS/ Itabaiana). Licenciatura em Matemática. karly@ufs.br

O propósito principal deste trabalho é apresentar um panorama a respeito do ensino e aprendizagem concatenado entre inequações, o corpo dos reais e lógica matemática, com enfoque na transição do ensino médio para o superior. Envolve uma releitura que pretende aprofundar alguns resultados de publicações e subsidiar uma reflexão que objetiva a melhoria do ensino de tal conceito e de outros correlacionados.

Tais conceitos balizam vários outros estudados em Cálculo Diferencial e Integral e Análise, principalmente os relacionados a limites, continuidades, derivadas e integração. De uma pesquisa realizada no banco de dados – periódicos da CAPES, localizamos várias dissertações e teses na área de Matemática, cujo título abarca a palavra Inequação. Isso demonstra ser esse um conteúdo matemático que reflete em um estudo posterior ao universitário, para os que optam por uma carreira na área de exatas. Cabe ressaltar ainda que esse tema envolve noções que devem ser concatenadas e aplicadas de forma coerente, tais como: interpretação do sinal de desigualdade, ordenação dos números reais, o significado da variável, da incógnita e parâmetros, compreensão do conjunto-solução, propriedades algébricas dos reais, fatoração, radiciação, relações de equivalência e implicações, funções, análises gráficas dentre outros. Assim, uma reflexão sobre o seu ensino-aprendizagem proporciona uma oportunidade para observarmos como os alunos compreendem e trabalham com o conceito e as resoluções de inequações. Conseqüentemente, podemos, por meio dessas observações propor um enfoque metodológico de ensino que vise maximizar a aprendizagem não somente de inequações, mas também de todos os conteúdos inter-relacionados, inclusive números reais e lógica matemática.

Abordagem teórico-metodológica

Elegemos uma metodologia de pesquisa histórico-bibliográfica do tipo **estado da arte**, pois buscamos entender os caminhos seguidos pelas publicações, identificando tendências, temáticas, épocas de maior e menor quantidade de publicações e eventos científicos que propiciaram o debate sobre esse tema e que elucidem o movimento não linear de tais pesquisas. Existe um interesse em categorizar, destacar características que possibilitam uma análise mais profunda, que desvele necessidades de investigações futuras, que faz recortes ainda não revelados, que trás à tona questões implícitas as investigações já realizadas (FERREIRA, 2002). Utilizamos estratégias de análise do tipo Métodos Mistos (CRESWELL, 2010) e uma abordagem teórico-metodológica para analisar os dados a qual recorre a instrumentos baseados na Análise de Conteúdo (BARDIN, 2011). Para essa autora “A intenção da análise de conteúdo é *a inferência de conhecimentos relativos às condições de*

produção (ou eventualmente, de recepção), inferência esta que recorre a indicadores (quantitativos ou não) [sic]”(p.44).

Para formar o *corpus* (BARDIN, 2011) inicial foram inventariados 67 trabalhos de cunho exclusivamente científico como artigos e teses. Desses, fizemos aqui um recorte e analisamos trabalhos publicados nos *Proceedings of Psychology Mathematics Education - PME* de 1991 até junho de 2011 e nas *Actes des Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre - SFIDA* de 1997 a 1999. O interesse por esses dois eventos, um de origem americana e outro europeia, se deu por eles terem dedicados momentos específicos para discussões, reflexões e socializações sobre o ensino e a aprendizagem de equações e inequações, e como nosso interesse está delimitado à concatenação entre inequações, números reais e lógica matemática, entendemos que tais eventos produziram publicações demarcatórias. Ao todo foram mapeados 33 artigos publicados nos anais e atas desses eventos, distribuídos segundo o gráfico 1. O gráfico 2 nos aponta a distribuição dos trabalhos os quais assinalam algum nível de concatenação, perfazendo um total de 21. Concentramos nesses.

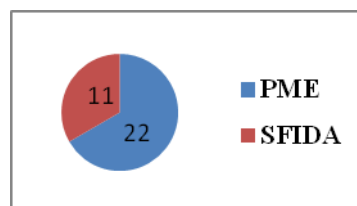


Gráfico 1: Eventos Mapeados e quantidade de trabalhos

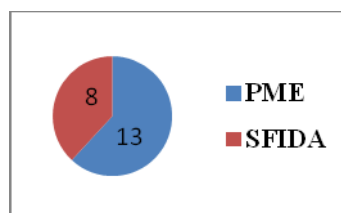


Gráfico 2: Quantidades de trabalhos que apontam algum nível de conexão entre os conceitos

Utilizamos como unidade de registro (**UR**) as palavras: inequações, números reais, conectivos lógicos, quantificadores, propriedades, em inglês, francês e italiano, línguas oficiais dos eventos. Como unidade de contexto (**UC**) examinamos os países de editoração e ou que sediaram as discussões; o tipo de pesquisa: campo ou teórica; os tipos de participantes: nacionalidade, idade, professor ou aluno, escolaridade; data da publicação; nível de concatenação entre os conceitos: ausente ([0%, 10%[]), superficial ([10%, 40%[]), médio ([40%, 60%[]), quase profundo ([60%,90%[]). O nível de conexão entre 90% a 100% não está

sendo considerado, pois interpretamos que não sejam alcançados, tendo em vista o alto nível de complexidade que uma conexão assim estabelece, isto é, levamos em consideração envolver conceitos de análise matemática e álgebra abstrata que tratam de axiomas, construção dos números reais e fundamentos de matemática mais avançados, o que só seria possível no tratamento de um curso superior específico de matemática. Aqui tecemos um olhar voltado para a atividade algébrica no sentido de Lins e Gimenez (1997).

Tais unidades tanto serviram para nortear as nossas buscas quanto as análises. Conforme Franco (2003) a palavra é a menor unidade de registro usada em Análise de Conteúdo. Ela tem sido utilizada em estudos de fidedignidade para determinar facilidade ou dificuldade de compreensão de material escrito, na base de referências personalizadas, uso de preposições, uso de prefixos, sufixos, adjetivos dentre outros. O processo de localização das unidades de contexto nos conduziu à construção de categorias *a priori*.

Fundamentação Matemática

Ao interpretar ou resolver uma inequação é necessário, em geral, mobilizar conceitos relacionados à ordenação e às propriedades atreladas ao conjunto dos números reais. Não obstante, muitas vezes também necessitamos recorrer aos significados e empregos dos conectivos lógicos (“e”; “ou”) ou dos quantificadores existenciais ou universais (“para todo”, “existe”), principalmente quando envolve restrições de existência. Exemplificando: seja resolver a inequação $\frac{(x-3)(x+1)}{x^2-1} \geq 0$. Neste caso temos que analisar, não necessariamente

nessa ordem:

- o sinal do produto $(x - 3)(x + 1)$, recorrendo ao conectivo “ou”;
- o sinal de $x^2 - 1$, de acordo com o conectivo “ou”;
- o sinal do quociente, utilizando o “ou”;
- o emprego da propriedade da não divisão por zero, excluindo o +1 e o -1;
- o emprego das propriedades de ordem: Para quaisquer que sejam os reais x, y, z, w , tem-se

i) Se $z > 0, x < y \Leftrightarrow xz < yz$

ii) Se $z < 0, x < y \Leftrightarrow xz > yz$ (GUIDORIZZI,1987)

Para proceder a uma interpretação e resolução consciente e raciocinada é importante conhecer possíveis equivalências entre as transformações a serem efetuadas e elas, por sua vez, são baseadas nas propriedades dos números reais e no uso correto dos conectivos. Assim, queremos analisar se tais publicações enfocam e como abordam tais conceitos, considerando serem eles essenciais para outros conhecimentos matemáticos e ser a inequação um conceito que oportuniza seus estudos. Assim, consideramos nessa investigação a relação de inequação com as estruturas matemáticas via as propriedades das operações com números reais e lógica matemática.

As análises

Procedemos à análise, segundo categorias *a priori*, frutos das unidades de contextos: países de editoração; tipo de pesquisa - campo ou teórica; tipos de participantes - nacionalidade, idade, professor ou aluno, escolaridade; data da publicação; nível de concatenação entre os conceitos - ausente ([0%, 10%[]), superficial ([10%, 40%[]), médio ([40%, 60%[]), quase profundo ([60%,90%[]).

Países de editoração

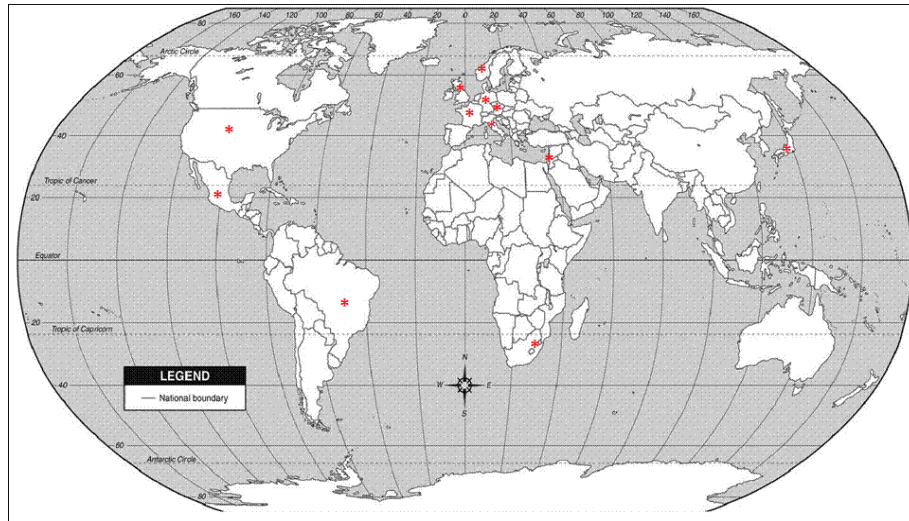


Figura 1: Espalhamento do tema de acordo com os países de editoração

Pelo mapa notamos que os países os quais estiveram contato direto com o tema, por meio desses eventos, foram: USA, México, Brasil, Itália, África do Sul, Israel, Japão, Holanda, Reino Unido, Noruega, República Checa e França. Tais países editoraram *proceedings* do PME e atas do SFIDA. Dessa forma, podemos intuir que, de fato, o assunto

está disseminado e existe possibilidade de que uma grande quantidade de países e pesquisadores tenham tido a oportunidade de conhecer o tema.

Tipo de pesquisa

Dos 21 trabalhos, somente 1 pode ser classificado como pesquisa teórica, aliás foi um estudo analítico dos trabalhos apresentados no fórum 02 do PME 28 (TALL, 2004).

Tipos de participantes

- Nacionalidade: Infelizmente, mesmo sendo artigos publicados em eventos internacionais muitos autores não caracterizam os participantes da pesquisa. Contudo, localizamos participantes Canadenses, Israelenses, Italianos, Franceses, Gregos e Brasileiros. Isso aponta para uma variedade de dados coletados de participantes de variadas culturas e que tenham provavelmente aprendido sob metodologias de ensino variadas, porém as dificuldades apontadas pelos pesquisadores são as mesmas.
- Idade e escolaridade: A faixa etária predominante está entre 15 a 17 anos (Gráfico 3), o que indica ter sido privilegiado os estudos com participantes do ensino médio. Neste nível, no Brasil, trabalha-se, em geral, inequações como produtos, quocientes, que envolvem raízes quadradas e polinomiais, com ênfase nas lineares e quadráticas. De fato, mesmo em outros países, pelos exemplos de protocolos e atividades preparadas para a coleta de dados, são esses os tipos estudados neste nível escolar.

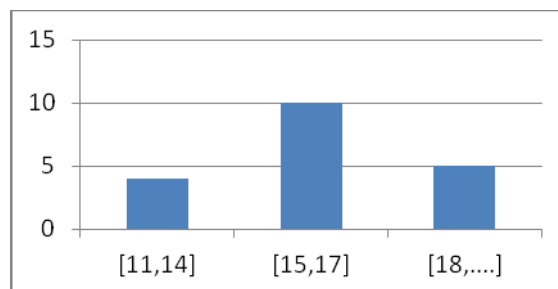


Gráfico 3: Dados sobre participantes: intervalo de idade x quantidade de publicações

- Professor ou aluno: dos 20 trabalhos mapeados, somente 2 apresentam resultados de pesquisas nas quais os participantes foram professores, todos os outros ou coletaram dados de alunos ou foram pesquisas teóricas.

Data da publicação

As datas das publicações estão de acordo com o gráfico 4.

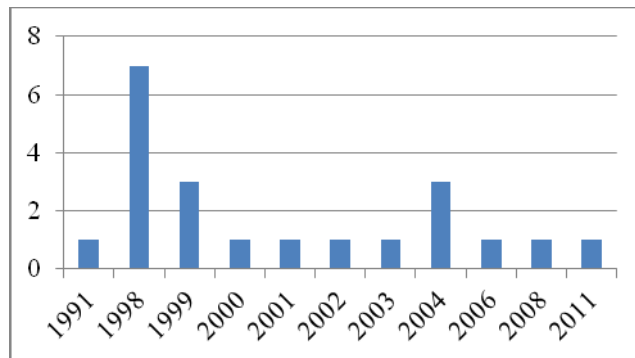


Gráfico 4: Quantidade de trabalhos por ano

Notamos que realmente os SFIDA como o X e o XI e o PME 28 concentraram artigos que tratam de inequações e, de alguma forma, evocam os outros conceitos. Além disso, o período de interesse por esse tema é extenso e ainda é atual.

Nível de concatenação entre os conceitos

Essa categoria visa indicar o nível de concatenação, tratado pelas publicações, entre as inequações, seja no sentido de interpretação ou de resolução, e os conteúdos matemáticos:

1. Números Reais (incluindo noção de intervalo, vizinhança, corpo ordenado completo, irracionais, racionais, números fracionários).
2. Conectivos Lógicos, Quantificadores.
3. Propriedades de Ordenação.
4. Axiomas gerais dos números reais.

- Ausente ([0%, 10%])

Dentre os 33 trabalhos iniciais, localizamos 17 os quais consideramos praticamente ausente o tratamento concatenado. Ponderamos que o autor não estabeleceu nenhuma ou quase nenhuma correlação entre os conceitos, isto é não está indicado, ou é pouquíssimo comentado explicitamente propriedades dos números reais, nem mesmo utilizando uma linguagem matemática pouco formal. Os outros conceitos não são nem indicados.

- Superficial ([10%, 40%])

Mapeamos 12 publicações as quais consideramos o tratamento correlacionado superficial: (LINCHEVSKY; SFARD, 1991), (CORTEZ; PFAFF, 2000), (TSAMIR; BAZZINI, 2001), (TSAMIR; TIROSH; TIANO, 2004), (SACKUR; MARUEL, 1998), (GALLO; BATTÚ, 1998), (BAZZINI, 1998), (CHIAPPINI; MOLINARI, 1998), (MAUREL; SACKUR, 1999), (BOERO, 1999), (BAZZINI; ASCARI, 2000) e (MALARA et al., 2000). Neste item avaliamos que o autor estabeleceu uma relação superficial entre os conceitos, isto

é em algum momento ao tratar as inequações ele citou algum deles. Consideramos nesse item formas indiretas de concatenação como, por exemplo, se o autor citou ou comentou ao menos uma das ações, mesmo que de maneira informal e utilizando uma linguagem pouco simbólica matematicamente:

- empregar propriedades como multiplicar ambos os membros de uma inequação por um valor positivo não altera o sinal da desigualdade, porém multiplicar por um valor negativo altera;
- excluir a possibilidade de um denominador ser zero;
- avaliar um conjunto-solução;
- analisar equivalências;
- manipular utilizando transformações permitidas;
- outras.

- Médio ([40%, 60%])

Aqui levantamos somente 3 trabalhos que possuem uma conexão entre os conceitos: HALMAGHI (2010), (TSAMIR; ALMOG; TIROSH, 1998) , (TSAMIR; BAZZINI, 2002). Avaliamos indicações apresentadas pelo pesquisador que retratam relações diretas entre inequações e os assuntos matemáticos citados anteriormente e tanto quanto mais abrangente maior o nível de concatenação. Isto é o autor comentou, analisou, citou formalmente, utilizando uma linguagem mais formal e um simbolismo matemático, pelo menos algum dos conceitos enumerados anteriormente de 1 - 4.

- Quase profundo ([60%,90%])

Tivemos somente uma publicação a qual atingiu, segundo nossa tipologia, esse nível de inter-relação entre os conteúdos: (TALL, 2004). Nessa caracterização estamos interessados em elencar as conexões, realizadas pelos investigadores, com as estruturas matemáticas fundamentais da álgebra abstrata, análise matemática e, de certa forma, com a matemática avançada. Em concordância com Tall (1995) podemos dizer que um pensamento matemático avançado envolve utilizar estruturas cognitivas produzidas por uma vasta extensão de atividades matemáticas para construir novas ideias que surgem e se avançam em um sempre crescente sistema de teoremas, estabelecidos por objetos formalmente definidos e provas sistemáticas. Mesmo nos trabalhos os quais os resultados estão baseados em dados coletados de universitários não detectamos esse nível de concatenação.

Considerações finais

Pelas análises podemos inferir que as publicações mapeadas apresentadas nesses eventos, em geral, não citaram as importantes conexões entre inequações e outros conteúdos [1-4]. Porém, estamos cientes que a maioria dos dados foi coletada de principiantes em matemática e isso pode inibir um tratamento mais formal da álgebra, em especial de inequações. Contudo, a concepção de que devemos iniciar a atividade algébrica tardiamente é polêmica e contradiz as ideias de alguns pesquisadores, como Lins e Gimenez (1997). De acordo com resultados de pesquisa de, por exemplo, Tsamir e Almog (2001), Alwyn Pang e Dyndyal (2010) o tratamento gráfico conduz a maior quantidade de soluções corretas, porém ele obscurece o enfoque manipulativo da álgebra, prevalecendo somente o visual, o que muitas vezes minimiza a capacidade de aprimorar as habilidades técnicas, o desenvolvimento de diferentes modos de pensar e enfrentar uma determinada situação matemática. Se queremos somente que os estudantes estejam aptos a encontrar o conjunto-solução, independentemente do entendimento da álgebra que o subsidia, então apenas o processo gráfico ou o “método da tabela de sinais” pode ser empreendido sem perda de qualidade, mas se queremos aproveitar esse conceito para que o aluno desenvolva sua capacidade matemática então precisamos investir em tempo e compreensão. Ressaltamos ainda que os respondentes das diversas pesquisas de campo apresentaram dificuldades em lidar com conectivos, quantificadores e com propriedades específicas de ordenação.

Pelos dados vimos que as pesquisas estão espalhadas nos continentes, mas ainda é preciso de investigações que abarquem e promovam a ideia do ensino correlacionado. Talvez devêssemos investir também em analisar o conhecimento dos professores quanto a esse assunto.

Destacamos, assim, o potencial de inequações para desenvolver várias maneiras de produzir significados, inclusive inter-relacionando os conceitos matemáticos itemizados anteriormente por 1 até 4. De nada adianta um estudante conseguir resolver uma inequação por métodos simplesmente algorítmicos e não compreender os porquês dos processos empreendidos mecanicamente. Estamos certos de que a aprendizagem desse assunto matemático não valeu a pena se ensinada somente por meios mecânicos. Um professor cuidadoso e que sabe matemática pode preparar suas aulas atentando aos detalhes e oportunidades matemáticas que determinados conteúdos oferecem.

Referências

ALVARENGA K. K.B; MACHADO S.A.D. PME Inequalities Production: A Survey. In: **Proceeding of PME XXV**, v.1, p.248, 2011.

ALWYN PANG W.; DINDYAL J. Students errors in the solution of inequaliteis at the junior college level. In: **Proceeding of PME XXIV** v.4,p. 17-24,2010.

ASSUDE T. De l'usage de "techniques faibles" et "techniques fortes" dans l'organisation du curriculum. In: **Actes des SFIDA IX**, p.IX9-IX14, 1997.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo:Edições 70, 2011.

BAZZINI L. ASCARI M. Disequazioni: Il ruolo Del segno. In: **Actas des SFIDA XII**. p.XII7-XII12,1999.

BOERO P. Inéquations: aspects didactiques, épistémologiques et cognitifs. In: **Actas des SFIDA X**, p.X3-X6, 1998a.

_____.Inéquations: pour une recherche pluridisciplinaire. In: **Actas des SFIDA XI**, p. XI47-XI52,1998b.

BOERO P; GARUTI R. Les inéquations fonctionnelles: lieu de développement et d'étude de la maîtrise dès fonctions. In: **Actas des SFIDA XII**, p.XII3-XII6, 1999.

_____.;BAZZINI L.;GARUTTI R. Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. In:**Proceedings of PME XXV**, v. 3, p.9-16, 2001.

_____; BAZZINI L. Inequalities in Mathematics Education: A need complementary perspectives, In: **Proceedings of PME XXVIII**, v.1,139-143,2004.

BAZZINI L.;Riflessioni didattiche sul concetto di equivalenza per equazioni e disequazioni. In: **Actas des SFIDA X**, p.X39-X43,1998.

CHIAPPINI G; MOLINARI M. Presentazione di um modelo di approccio alle disequazioni com ragazzi di 11-12 anni. In: **Séminaires Franco-Italien de Didactique de L'Algèbre – SFIDA XI**, p XI45-XI54,1998.

CORTES A.; PFAFF N. Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students.In: **Proceedings of PME XXIV**, v. 2, p. 193-200, 2000.

CRESWELL, J.W. **Projeto de Pesquisa – métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DE SOUZA V.G.; CAMPOS T. Inequations Resolution Using Various Registers . In: **Proceedings of PME XXXII**, v.1 ,338, 2008.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação e Sociedade**. Campinas, ano 23, n.79, p.257-272, 2002.

FRANCO. M. L. P. B. **Análise de Conteúdo**. Brasília: Plano Editora Ltda, 2003.

- GALLO E.; BATTÚ M. Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni? . In: **Actas des SFIDA XI**, p.X25-X37,1998.
- GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo Diferencial e Integral I**. São Paulo: LTC, 1997.
- HALMAGHI E. Undergraduate student's conceptions of inequalities: sanding the lens. In: **Proceedings of PME XXXIV**, v.3,41-46, 2010.
- KIERAN C. The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality Situations. In: **Proceedings of PME XXVIII**, v.1,143-147,2003.
- LINS, R.C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritméticas e álgebra para o século XXI**. CAMPINAS: PAPIRUS, 1997.
- LIM K. Characterizing student's thinking: algebraic, inequalities and equations. In: **Proceedings of PME NA XXVI**. v.2, 102-109, 2006.
- LINCHEVSKY L; SFARD A. Rules without reasons as process without objects- the case of equations and inequalities. In: **Proceedings of PME XV**. v. 2, 317-324,1991.
- MALARA N.; BRANDOLI M.T.; FIORI C. Comportamenti di studenti in ingresso all'università di fronte allo Studio di disequazioni. In: **Actas des SFIDA XII**, p. XII13-XII28, 1999.
- RADFORD L. Syntax and Meaning. In: **Proceedings of PME XXVIII**, v.1,161-165, 2004.
- RIVERA F.; BECKER J. R. Sociocultural account of students collective mathematical understanding of polynomial in instrumented activity. In: **Proceedings of PME XXVIII**, v. 4, 81-88, 2004.
- SACKUR C.; MAUREL M. Les outils théoriques du GECO et les inéquations en classe de seconde. In: **Actas des SFIDA XI**, p.X7-X18, 1998.
- _____.Les inéquations en classe de seconde et l'expérience de La nécessité . In: **Actas des SFIDA XII**, p.XI35-XI46,1999.
- SACKUR C. Problems related to the use of graphs in solving inequalities. In: **Proceedings of PME XXVIII**, v.1, 148-151,2004.
- SFARD A; LINCHEVSKY L. Equations and Inequalities – process without objects? In: **Proceedings of PME XVI** v.3, p.136, 1992.
- VIRIKIOS P.; FARMAKI V. Introducing algebraic thinking to 13 year-old students: the case of inequality. In: **Proceedings of PME XXX**, v. 5, 321-328, 2006.
- TALL D. Reflections on research and teaching of equations and inequalities. In: **Proceedings of PME XXVIII**, v 1,158-161, 2004.
- TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: **Proceedings of the PME XIX**, vol.1, p.61- 75,1995.

TSAMIR, P; ALMOG N.; TIROSH D. Student's solutions of inequalities. In: **The Proceedings of PME XXII**, v.4, p.129-136, 1998.

_____; ALMOG N. No answer as a problematic response: the case of inequalities In: **The Proceedings of PME XXIII**, v.1, 328, 1999.

_____; BAZZINI L. Can $x=3$ be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students In: **The Proceedings of PME XXV**, v.4, p.303-310, 2001.

_____; BAZZINI L. Algorithmic Models: Italian and Israeli student's solutions to algebraic inequalities. In: **The Proceedings of PME XXVI**, v.4, p.289-296, 2002.

_____; TIROSH D.; TIANO N. New Errors And Old Errors: The Case Of Quadratic Inequalities. In: **The Proceedings of PME XXVIII**, 1, 155-158, 2004