VI Colóquio Internacional
"Educação e Contemporaneidade"
São Cristovão-SE/Brasil
20 a 22 de setembro de 2012

O ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO SUPERIOR: ALGUMAS FERRAMENTAS TEÓRICAS PARA PENSAR O USO DA LINGUAGEM MATEMÁTICA

Adriano Luiz dos Santos[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

EIXO TEMÁTICO: Educação e Ensino de Ciências Exatas e Biológica

Resumo

Nesta comunicação científica temos a intenção de trazer alguns elementos teóricos que estamos utilizando para o desenvolvimento de uma pesquisa de mestrado relacionada ao uso da linguagem matemática na prática de esboço de curvas. Trazemos algumas considerações desta prática tomando como referência a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e, em seguida, nos colocamos frente ao nosso objeto de estudo segundo concepções do enfoque ontosemiótico de Juan Dìaz Godino. Identificamos uma aproximação entre estas duas teorias e, com isso, trazemos argumentos que pensamos servir para realizar nossa investigação sobre a linguagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Linguagem matemática. Esboço de curvas.

Abstract

In this cientific comunication we have the intend to bring some theoretical elements that we are using to the developing of a master research related to the use of mathematical language on the sketching curves practice. We bring some considerations of this practice taking reference on the Registers of Semiotic Representation's Theory, by Raymond Duval, and then we place in front of our study's object according to the conceptions of Ontosemiotic Approach, by Juan Dìaz Godino. We identified a connection between these two theories and, thereby, we bring arguments that think serve to realize our investigation on the mathematical language.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical language. Sketch curves.

Introdução

Ao analisar alguns livros de Cálculo, pode-se perceber que o esboço de curvas estudado no ensino superior tem como principal objetivo a construção gráfica a partir das expressões algébricas das funções. Em geral, tais funções são mais complexas que as estudadas no ensino médio uma vez que neste nível de ensino o estudo limita-se a alguns tipos particulares de funções, como as polinomiais até o grau 2, trigonométricas, logarítmicas, entre outras. No ensino superior as funções que são objetos de estudo são mais gerais e complexas, pois muitas vezes são funções que podem ser definidas a partir de somas, diferenças, produtos, quocientes ou composições de outras funções.

Funções mais complexas exigem ferramentas matemáticas mais potentes para darem conta de seus tratamentos, e é ai que os conceitos apresentados no Cálculo Diferencial e Integral se tornam valiosos. Após o estudo dos limites e derivadas de funções reais de uma variável, o esboço de curvas é inserido no programa de estudo de Cálculo como uma aplicação destes conceitos, nos livros de Cálculo, ao final da seção que aborda tal assunto, é muito comum de se encontrar tabelas ou quadros que enumeram os passos algébricos necessários para se traçar o gráfico das curvas[3].

Atualmente, muitas pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática estão dando atenção para a utilização de calculadoras gráficas e softwares que auxiliam na tarefa de esboçar gráficos. Com a inserção destas novas tecnologias, estudar o esboço de curvas parece tomar um panorama diferente do que é proposto em algumas bibliografias, pois agora, todo o procedimento que se realizava manualmente através de uma série de cálculos de limites e derivadas parecem ter se tornado uma tarefa enfadonha frente estas tecnologias. Se, por exemplo, pensarmos em um engenheiro ou um economista, ou mesmo um matemático, ao se depararem com alguma situação prática que necessita da análise gráfica, e que para isso seja necessário traçar o esboço de uma curva a partir de uma lei algébrica, com certeza eles utilizarão alguma destas tecnologias para realizar tal tarefa.

Desta forma, parece que o estudo do esboço de curvas não pode se basear apenas numa aplicação para os conceitos de limites e derivadas, mas numa prática que, além de realizar tal tarefa, permita uma análise do comportamento de curvas através destes conceitos.

A comunicação científica que buscamos trazer aqui é uma reflexão a respeito da prática de esboço de curvas no ensino superior, onde tentaremos apresentar alguns elementos teóricos e metodológicos que julgamos possibilitar a realização de uma análise do uso que é feito da linguagem matemática nesta prática, tanto por parte do que é tomado como referência pela matemática acadêmica, ou melhor dizendo, pelo que se pretende ensinar, quanto por parte do aprendizado que é alcançado pelos estudantes.

Para realizar tal tarefa, tomaremos como principais aportes teóricos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e o Enfoque Ontosemiótico, de Juan Díaz Godino.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e uma proposta para o procedimento de esboço de curvas

O pesquisador em didática da matemática Raymond Duval, em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), denomina de atividade de *conversão* à prática matemática que demanda a mudança de representação de um sistema semiótico para outro, ou seja, no caso do esboço de curvas, transitar da representação algébrica para a representação gráfica de uma função, por tratar-se de sistemas semiótico diferentes, é chamado de uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Particularmente a atividade de conversão é objeto de estudo de Duval, ele alerta que se um aluno é capaz de realizar uma conversão no sentido registro algébrico → registro gráfico, não significa que o mesmo seja capaz de realizar a conversão no sentido inverso (registro gráfico → registro algébrico). Duval diz que tal conversão não é automaticamente subentendida pelos alunos.

Para Duval, "A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação[,] e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade de conversão". (DUVAL, 1993 apud MORETTI, 2002, p. 349). A partir desta afirmação, a compreensão acontece mediante a coordenação de ao menos dois registros, o que demanda a conversão espontânea em ambos os sentidos, ou seja, de um registro A para um registro B e vice-versa.

Perceba que esta hipótese de Duval, se aplicada à prática de esboço de curvas, sugere uma abordagem que dê ênfase não apenas ao esboço de curvas a partir das representações algébricas, mas também no sentido contrário, ou seja, que se parta de gráficos das funções para se chegar a representações algébricas das mesmas.

Em artigo publicado em 1988, intitulado *Gráficos e equações: a articulação de dois registros*, Duval sugere um procedimento que possibilita a coordenação[4] entre os registros gráficos e algébricos ao se estudar funções polinomiais do primeiro grau. É o que ele chama de procedimento de *interpretação global das propriedades figurais*, ou simplesmente, como nos referiremos aqui, procedimento de interpretação global. A ideia básica deste procedimento é propor uma prática de esboço de curvas baseada na associação entre elementos que são significativos a cada um dos registros de representação, ou seja, através da associação de *qualidades* que são identificáveis em cada registro.

Duval explica o procedimento de interpretação global da seguinte maneira:

> O conjunto traçado/eixos [O gráfico] forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder a uma** análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem **não estamos mais na presença da associação "um ponto - um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação - unidade significativa da expressão algébrica"**. (DUVAL, 2011, p. 99. Grifos do autor).

Após alguns anos, este procedimento vem inspirando outros pesquisadores a buscar por elementos que permitam esta associação entre variáveis visuais e unidades significativas do sistema algébrico, no entanto, uma pergunta pode estar surgindo agora: Como pensar uma conversão de um registro gráfico para o registro algébrico no ensino superior, pois como já comentamos, neste nível de ensino as funções podem ser definidas por somas, diferenças, composições, de várias outras funções?

De fato, a complexidade das funções que são tratadas no ensino superior, salvo em casos muito particulares, não permitem que, a partir do registro gráfico se obtenha seu respectivo registro algébrico, no entanto, em 2008, Moretti, Ferreira e Ferraz publicam uma pesquisa que oferece alguns elementos para pensar tal conversão. O que estes pesquisadores sugerem, baseando-se no procedimento de interpretação global, é identificar unidades básicas dos registros gráficos e algébricos e relacioná-las, desta forma possibilitando a coordenação, não diretamente do registro gráfico para o registro algébrico, mas sim entre elementos significativos referentes a cada um destes dois registros.

As unidades básicas classificadas por estes autores foram as *variações*, *concavidade*, *extremos relativos*, *retas assintóticas*, *pontos de inflexão* e *continuidade*. Todos estes são elementos que já recebem atenção nas disciplinas de Cálculo, e desta forma podem ser relacionadas com os registros algébricos referentes aos limites e derivadas de funções.

Como já mencionamos nossas intenções na introdução deste trabalho, nosso objetivo não é verificar se tal procedimento funciona ou não, ou se é possível de ser implementado, pois já há trabalhos realizados com este intuito[5], mas pensamos em utilizá-los nas interações em sala de aula com os estudantes por acreditar que este possibilitará uma análise mais refinada da prática que estamos investigando. Interessamos-nos pela produção e comunicação dos signos, e também em como estes se relacionam e geram/recebem algum significado.

Vamos passar agora para o outro aporte teórico que tentaremos entrelaçar com a TRRS, o Enfoque Ontosemiótico, que vem sendo desenvolvido pelo pesquisador em didática da matemática, Juan Díaz Godino, em colaboração com outros pesquisadores.

Uma ontologia e semiótica para atividade matemática

O EOS entende a matemática como uma atividade socialmente compartilhada, de resolução de problemas, que possui linguagem simbólica e sistemas conceituais logicamente organizados (GODINO; BATANERO, 1994). Nesta teoria, *prática matemática* é considerada como "toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos[6], comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas". (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Desta forma, para a prática de esboço de curvas é necessário à mobilização de outras práticas, como a utilização de vários registros semióticos de representação, a conversão entre estes registros, o domínio de algoritmos para resolução de equações e inequações, cálculo de limites e derivadas, etc. E por estas práticas estarem organizadas a partir de determinadas regras, julgamos coerente entender o esboço de curvas como um sistema de práticas operativas e discursivas[7] (GODINO; BATANERO, 1994).

Também partilhamos aqui do entendimento de *objeto matemático* do EOS, que não se limita apenas a entendê-lo como um conceito, uma entidade abstrata, mas "como tudo aquilo que pode ser indicado, tudo que pode ser notado ou ao que se pode fazer referência quando fazemos, comunicamos ou aprendemos matemática." (GODINO, 2002, p. 5. Tradução nossa). Desta forma, por exemplo, tanto a "ideia" que possibilita se pensar uma relação específica entre conjuntos, quanto sua escrita e seus procedimentos são, cada um deles, objetos matemáticos. No entanto, para fundamentar esta teoria, Godino e seus colaboradores sugerem uma classificação mínima para os objetos matemáticos, as quais são tomadas como uma ontologia para se analisar a prática matemática. Os autores ainda dizem que

> A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta, mas relativa, posto que se trata de entidades funcionais e relativas aos jogos de linguagem[8] (marcos institucionais, comunidade de práticas e contextos de uso) em que participam; tem também um caráter recursivo, no sentido de que cada objeto, dependendo do nível de análise, pode estar composto por entidades dos outros tipos (GODINO et al., 2011, p. 7. Tradução nossa).

A tipologia sugerida para os objetos matemáticos baseia-se nos seguintes elementos:

- ***Elementos linguísticos*** (termos, expressões, notações, gráficos,...) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)
- ***Situações - problemas*** (aplicações extra-matemática, tarefas, exercícios,...)
- ***Conceitos - definições*** (introduzidos mediante definições ou descrições) (reta, ponto, número, média, função,...)
- ***Proposições*** (enunciados sobre conceitos,...)
- ***Procedimentos*** (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...)
- ***Argumentos*** (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...).

(Ibidem, p. 7. Tradução nossa.)

Estas seis entidades primárias podem se articular de maneira que outros objetos matemáticos possam emergir, sejam de caráter operativo ou discursivo.

Pelo que expomos na introdução a respeito de esboçar o gráfico de curvas no ensino superior, podemos dizer que tal prática exige “ferramentas” mais avançadas (limites e derivadas) e, consequentemente, práticas específicas para poder operá-las, as quais ainda não são do conhecimento dos estudantes. Claro que ao ingressar no ensino superior estes já trazem consigo alguma prática para o esboço de curvas, pois devem passar por outros níveis de ensino, que apresentam práticas com certas semelhanças, para poder se tornar um estudante universitário. No EOS, esta prática matemática do estudante é denominada de *prática pessoal*, ou *prática cognitiva*, já a prática que se tem o objetivo de se ensinar neste “novo” nível de ensino, a da matemática acadêmica, recebe o nome de *prática institucional*, ou *prática epistêmica*.

A noção de instituição desta teoria é colocada da seguinte maneira:

> Uma instituição está constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problem[as]; compromisso mútuo com a mesma problemática implica na realização de determinadas práticas sociais que frequentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como em suas regras e modos de funcionamento. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

Com estas argumentações, e sem a intenção de limitar a noção de ensino e aprendizagem, tomaremos o ensino como sendo uma tentativa de inserir o estudante numa prática institucional, ou seja, que os estudantes passem a realizar o esboço de curvas a partir da prática oferecida pela matemática acadêmica. Enquanto que o aprendizado baseia-se na apropriação dos significados, por parte dos estudantes, referentes a esta nova prática que se busca inseri-lo.

Propor uma ontologia para a atividade matemática como feita por Godino, permite que se organize uma configuração para os objetos matemáticos que intervêm na prática de esboço de curvas, tanto na perspectiva da instituição, que neste caso chamaremos de *configuração epistêmica*, quanto na perspectiva do estudante, que daremos o nome de *configuração cognitiva* (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). A noção de semiótica utilizada no EOS baseia-se na correspondência entre estes vários objetos que se relacionam na prática matemática, correspondência estas

> [...] estabelecidas por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um determinado critério ou código de correspondência. Esses códigos podem ser regras (hábitos, convênios) que informam aos sujeitos implicados sobre os termos que devem ser colocados em correspondência nas circunstâncias fixadas. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 15)

Perceba que esta concepção de semiótica possibilita uma integração com o procedimento de interpretação global proposto por Duval (2011) e as unidades básicas de Moretti (2008), pois estas também buscam por correspondências entre unidades significativas dos registros semióticos durante a atividade matemática.

Passaremos agora para a apresentação da trilha metodológica que pretendemos tomar na pesquisa que estamos realizando referente ao estudo da linguagem matemática. Como nosso espaço é limitado, traremos a seguir algumas configurações epistêmicas que organizamos referente ao conceito de ponto crítico.

Alguns passos metodológicos

Referente às entidades primárias da ontologia da seção anterior, Godino (2008) comenta que "As situações-problemas são a origem ou razão de ser da atividade; a *linguagem representa as demais entidades e serve de instrumento para a ação*; os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si." (p. 14. Grifos nossos).

As configurações epistêmicas que apresentaremos referem-se ao conceito de ponto crítico, que emerge, segundo nossa organização, da correspondência de outros objetos matemáticos. Começaremos fazendo uma descrição da relação entre as entidades primárias, para que ao final, observando os esquemas construídos, possamos falar da linguagem matemática e da utilização destas configurações para pensar o ensino e aprendizagem da prática de esboço de curvas.

Organizamos as configurações pensando numa aula que poderia ser entendida como "tradicional", pois foi pensada como sendo expositiva e dialogada em frente ao quadro negro. Entendemos como objetivo para o ensino do conceito de ponto crítico o de *possibilitar que os estudantes identifiquem que os pontos do domínio da função em que sua derivada se anula ou não existe, são candidatos a máximo ou mínimo relativos*[9]*, portanto, um ponto crítico*.

Baseando-se na ontologia apresentada, identificamos como *situação-problema* a que, 'a partir de desenhos de gráficos com extremos relativos, busca-se associar o comportamento das retas tangentes à função nestes extremos'.

Consideramos como *conceitos* necessários para esta prática os de reta tangente, coeficiente angular, extremos relativos e derivadas. A partir da situação-problema posta, podemos considerar dois casos, um em que existe a reta tangente à função passando pelo extremo relativo, e outro em que não existe tal reta tangente. Vamos inicialmente analisar as associações entre os objetos matemáticos do primeiro caso.

As *propriedades* que se relacionam são as seguintes: 'a reta tangente à curva e que passa pelo extremo relativo é paralela ao eixo x', esta se associa com a propriedade que garante que 'o coeficiente angular desta reta tangente, neste ponto, é zero' e que, por fim, se associa com 'a derivada da função, neste ponto, é zero', ou '$f'(x_0) = 0$'.

Destas associações emergem dois outros objetos, o *procedimento* que sugere 'verificar em que pontos do domínio a derivada da função se anula' e o *argumento*, ainda precipitado, que 'os pontos em que a derivada da função se anula é um extremo relativo'.

Observe o esquema que criamos para representar esta configuração epistêmica na Figura 1.

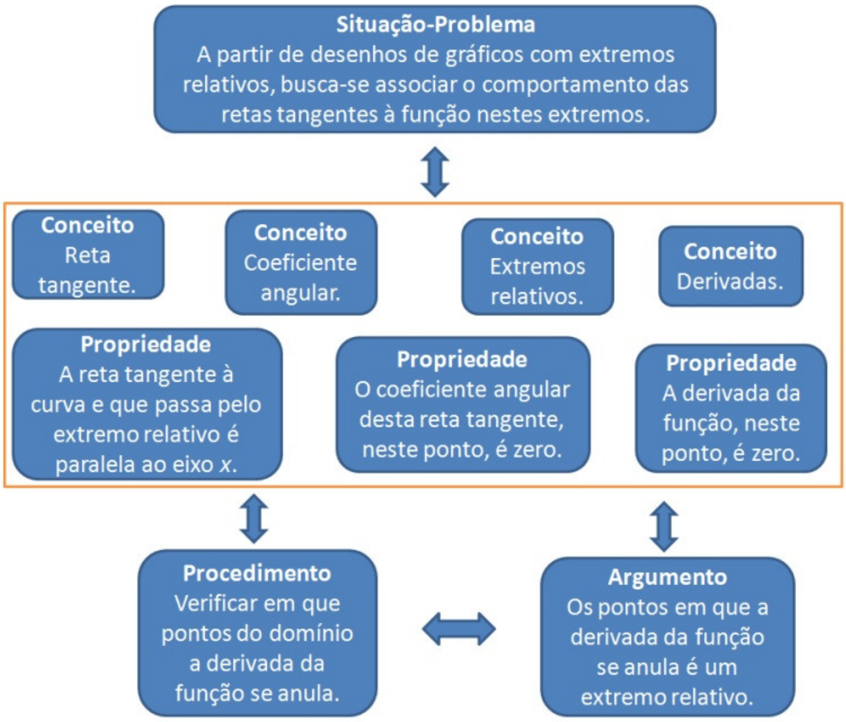

Figura 1 – Configuração epistêmica para o conceito de ponto crítico quando existe derivada no ponto.

Antes de levantar alguma consideração vejamos o caso em que não existe reta tangente que passa pelos extremos relativos, em que necessitaremos de mais alguns *conceitos* para a prática, o de ponto anguloso e o de derivadas laterais.

A associação que acontece entre as *propriedades* é a seguinte: se 'a função tem um ponto anguloso', 'não existe uma reta que seja tangente à função neste ponto', e, consequentemente, 'não existe derivada da função neste ponto'.

Destas emergem também dois objetos, o *procedimento* que sugere 'verificar se há algum ponto do domínio da função em que a sua derivada não exista', e o *argumento*, também ainda precipitado, que diz que 'os pontos do domínio da função em que a derivada não existe é um extremo relativo'. Agora o esquema fica a como na Figura 2.

Como já mencionado, os dois argumentos obtidos são precipitados, pois os pontos do domínio da função em que a sua derivada se anula ou não existe, não garante que identificamos um extremo relativo, mas um possível "candidato" a extremo relativo. Para problematizar estes argumentos, pensamos em apresentar contraexemplos aos estudantes visando uma comparação entre os argumentos obtidos e as situações geométricas, que acabarão por contradizer os primeiros.

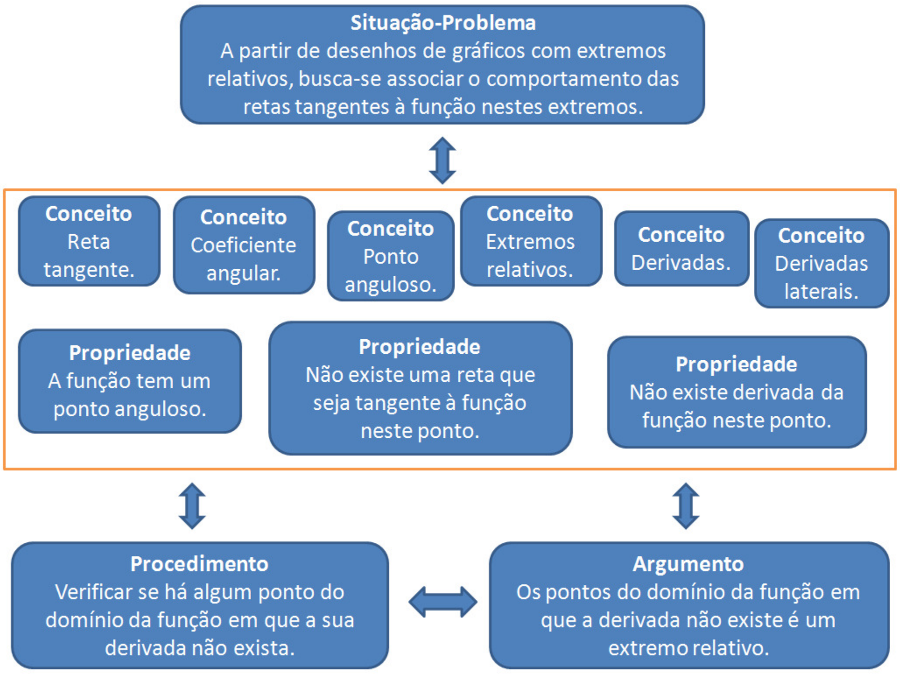

Figura 2 – Configuração epistêmica para o conceito de ponto crítico quando não existe derivada no ponto.

Neste trabalho trazemos apenas um contraexemplo referente ao primeiro caso, em que pensamos em colocar os estudantes diante da função $f(x) = x^3$, que tem por derivada a função $f'(x) = 3x^2$ e, consequentemente, $f'(0) = 0$. Pelos argumentos postos até o momento, no primeiro caso, este ponto é um extremo relativo, no entanto, ao traçar um esboço do gráfico da função os estudantes podem identificar que a mesma não possui extremos relativos, o que permiti a intervenção do professor em aula para reorganizar os argumentos apresentados e ai tentar alcançar os objetivos pretendidos.

Com estas configurações, pode-se perceber que a prática que se institui, ou pelo menos se busca instituir, é a seguinte: 'Para identificar os pontos que são candidatos a extremos relativos, ou seja, os pontos críticos, basta derivar a função e identificar se sua derivada se anula ou não existe em algum ponto de seu domínio'.

A linguagem matemática se manifesta como representação das demais entidades primárias mediante os registros gráficos, linguísticos e algébricos utilizados, além de trazer as regras que estão em conformidade com o que é considerado como válido nesta prática. A "instrumentação" que se utiliza baseia-se nas conversões entre os registros utilizados, a resolução de equações, inequações e o cálculo de derivadas.

Para falar destas configurações, passamos agora para as últimas considerações deste trabalho.

Considerações finais

Ao pensar uma prática matemática a partir das seis entidades primárias proposta pelo EOS, é possível que se realize uma avaliação mais pontual da aprendizagem dos estudantes, pois como a correspondência entre os objetos fica mais evidente através de uma configuração epistêmica, podemos pensar em criar configurações cognitivas da produção dos estudantes e identificar de maneira mais eficiente o nível de apropriação destes em relação às práticas que se pretende inseri-los.

Também argumentamos que ter em mãos este "mapeamento" das relações feitas pelos estudantes referentes aos objetos matemáticos, permite que o professor repense suas interações em sala de aula, na tentativa de focar sua atenção em reorganizar as associações feitas pelos estudantes e que não se adéquam à apropriação que se espera por parte destes.

Ainda com as configurações epistêmicas, pudemos identificar que mesmo se partindo de situações-problemas representadas no registro gráfico de funções ('a partir de desenhos de gráficos com extremos relativos, busca-se associar o comportamento das retas tangentes à função nestes extremos'), a prática que acaba por se instituir no esboço de curvas é a de realizar conversões do registro algébrico para o gráfico, o que torna a proposta de esboço de curvas proposta por Moretti (2008) uma prática ainda mais valiosa para o processo de ensino e aprendizagem deste assunto.

Por fim, mesmo tendo consciência de que as configurações epistêmicas aqui apresentadas ainda são um ensaio, julgamos que podem servir como importantes ferramentas para a realização de estudos relacionados ao uso da linguagem nas práticas matemática. Esta, associada aos trabalhos de Duval, Moretti e outros aspectos do EOS, que não puderam ser apresentados aqui devido a nossa limitação de espaço, serão importantes para a pesquisa que estamos relacionando na área da linguagem matemática.

Referências

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations. Glasgow: Basil Blackwell, 1985.

DUVAL, R. *Registre de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM – ULP, Strasbourg, v. 5, p. 37-64, 1993.

______. *Gráficos e equações*: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 15 de dez. de 2011.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, v. 22, n. 2.3, p. 237-284, 2002. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 12 de fev. de 2011.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. Trad. Edson Crisóstomo dos Santos e Claudia Lisete Oliveira Groenwald. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 10, n. 2, p. 7-37, jul/dez 2008. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm>. Acesso em 12 de fev. de 2011.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2011. (Versão em espanhol) Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sistemas/semioticos/24junio2009.pdf>. Acesso em 20 de jun. de 2012.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Cálculo A. São Paulo: Makron Books, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo. 5ª ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3ª ed. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1994.

LUIZ, L. S. *Esboço de curvas no ensino superior*: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

MORETTI, M. T. O papel dos Registros de representação na aprendizagem de Matemática. *Contrapontos* (UNIVALI), Itajaí, v. 1, n. 1, p. 343-362, 2002.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Revista Quadrante*, v. 15, n. 2, p. 97-122, 2008.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. *Educação Matemática Pesquisa*. v.12, n.3, p. 529-547 2010.

SILVA, M. O. *Esboço de curvas: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina.

STEWART, J. Cálculo. Vol. 1. 5ª ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações Filosóficas*. [1953] Tradução de José Carlos Bruni. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979. (Os pensadores).

[1] Licenciado em Matemática e Especialista em Matemática Computacional, atualmente é Mestrando do Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC, professor.adriano@gmail.com.

[2] Doutor em Didática da Matemática, Grupo de pesquisa GPEEM, Professor do PPGECT/UFSC, mthmoretti@gmail.com.

[3] Confira, por exemplo, GONÇALVES & FLEMMING (2000, p. 284); GUIDORIZZI (2008, p. 257); LEITHOLD (1994, p. 256) e STEWART (2009, p. 288).

[4] Ao nos referirmos à coordenação de registros, estamos nos referindo a conversão entre registros em ambos os sentido, ou seja, como já comentamos, de um registro A para um registro B e vice-versa.

[5] Confira, por exemplo, Silva (2008), Luiz (2010) e Moretti & Luiz (2010).

[6] Não nos remeteremos neste momento a delimitar a noção de *problema matemático* no EOS. Para conhecer mais a respeito confira Godino e Batanera (1994).

[7] Durante nossa escrita ainda vamos nos referir à "prática de esboço de curvas" ao invés de "sistema de práticas de esboço de curvas", pois entendemos que o esboço de curvas é uma prática que emerge da relação entre outras práticas.

[8] Godino diz, em alguns de seus trabalhos, que se utiliza do mesmo conceito de *jogos de linguagem* posto por Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas*, de 1953. Ele baseia-se na interpretação feita por Baker e Hacker (1985).

[9] Algumas vezes nos referiremos aos pontos de máximo ou mínimo relativos apenas como *extremos relativos*.