ATIVIDADES DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: PERSPECTIVAS E DESAFIOS NA COMPREENSÃO DE CONCEITOS ARITMÉTICOS

Evilásio José de Arruda[1]

Educação e Ensino de Ciências Exatas e Biológicas

Resumo

Este ensaio de cunho teórico trata do Pensamento Algébrico na Educação Matemática, objetivando entender como os conceitos presentes na relação entre a Aritmética e Álgebra se estabeleceram e progrediram, tendo como objeto principal a *tensão* entre método e objeto presente na obra intitulada "Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra" publicado originalmente em 1934 e 1936 em alemão por Jacob Klein. Neste artigo abordamos duas resoluções de equações, a resolução do primeiro problema do livro I de Diophantus bem como a resolução desse problema por Vieta. Entendemos que na Matemática há uma *tensão* entre as seguintes perspectivas de seus objetos: a téchne, o método, a generalização e a Logística que preocupam com cálculos práticos e resolução de problemas. E, de outro lado: a *episteme*, o objeto, a justificação e a Aritmética respectivamente, que estão preocupados com os fundamentos da Matemática. A partir da análise dessas resoluções fundamentadas no pensamento oteano (1993), sinalizaremos para uma reflexão no que diz respeito ao fato de que no início do Simbolismo Algébrico Moderno está presente a transição entre a noção descritiva para noção operativa dos conceitos matemáticos.

Palavras-Chave: História da Matemática, Número, Pensamento Algébrico.

Abstract

This essay with theoric inclination treats the Algebraic Thinking in Mathematical Education, aiming to understand how the concepts present in the relation between Arithmethics and Algebra got established and progressed, having as center the tension between method and object, as seen in the work "Greek Mathematical Thought and The

---

[1] Doutorando do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, sob Orientação do Prof. Dr. Michael F. Otte – josearruda@terra.com.br.

Origin of Algebra", published originally between 1934 and 1936 in German, by Jacob Klein. In this article we approach the solution of two equations, the solution of the first problem of Diophantus Book I, as seen in the book and as done by Vieta. We understand that in Mathematics there is a tension between the following perspectives and their objects: the techne, the method, the generalization and the logistic of practical calculations and problem solving. And, by the other side: the episteme, the object, the justification and Arithmethics respectively, which are worried with the foundations of Mathematics. From the analysis of those solutions based on otean thinking (1993) we will exhibit one reflection about the fact that in the beginning of the Modern Algebraic Symbolism there is a transition from descriptive notion to operative notion of the mathematical concepts.

Keywords: History of Mathematics, Numbers, Algebraic Thinking.

1. Introdução

Estamos traduzindo e interpretando a obra de Jacob Klein (1899-1978) intitulada "O Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra"[2] publicado em 1934, referente às *tensões* que ocorreram no momento de transição, nos séculos XVI e XVII, entre a Matemática Grega Antiga e a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno. Nessa obra, Klein trata do processo e a forma em que a Matemática Grega Antiga anexou e transformou a compreensão de conceitos matemáticos, tendo como consequência a criação de uma nova linguagem Matemática, considerada como mudança de paradigma na interpretação de fenômenos físicos.

Klein (1992) identifica que a "criação/descoberta"[3] da linguagem formal da Matemática é idêntica com a fundação da Álgebra Moderna, então, há uma conexão íntima entre a linguagem Matemática formal e o conteúdo da Física Matemática, e essa conexão decorre do tipo especial de conceitualização, que é concomitante com a Ciência Moderna, que por sua vez foi fundamental para sua formação.

O livro de Jacob Klein está separado em três partes que se complementam no sentido de ajudar a compreender como os conceitos da Logística e Aritmética se relacionaram e consequentemente transformaram os objetos da Matemática no decorrer da História da Matemática.

Na primeira parte do livro são discutidas concepções da Filosofia Pitagórica, Platônica e Aristotélica referente às similaridades e diferenças entre logística (teórica e prática) e aritmética (teórica e prática). Na segunda parte, Klein trata da relação entre a

[2]Nosso foco de estudo é a obra traduzida para a Língua Inglesa em 1968 e republicada integralmente em 1992 intitulada "Greek Mathematical Thought and The Origin of Algebra".

[3] Klein fala em criação da linguagem formal.

concepção Antiga e Moderna reinterpretando o trabalho de Diophantus (século III, dC), considernado-o como uma teoria Logística e com dependência do conceito de arithmo, contudo incorpora uma tradição algébrica pré-grega mais geral.

Ainda na segunda parte, Klein apresenta a transformação da técnica de Diophantus nas mãos de Vieta (1540-1603), mostrando que o renascimento e assimilação da Logística Grega no século XVI na perspectiva da ampliação do conceito de número com Stevin (1548-1620), por exemplo, levou ao estabelecimento da estrutura conceitual do Simbolismo Algébrico Moderno que é na verdade, segundo Klein, o resultado de uma nova compreensão do conceito de número. Na terceira parte do livro, há o *appendix*, que trata da introdução da *arte analítica* por Vieta.

Começamos nosso estudo pela segunda parte que trata da diferença entre a terminologia Antiga e Moderna, pois estamos interessados essencialmente no momento histórico em que surge o contraste na elaboração e representação das ideias dos conceitos matemáticos Antigos e Novos. Esta diferença foi articulada pincipalmente em termos da distinção entre *epistéme* e *téchne*. Quando se trata de atingirmos nossos desejos imediatos do ponto de vista pragmático ou prático (*téchne*) fica em pauta o instrumentalismo, agora a *epistéme* se evidencia no sentido de tentar compreender as causas e objetivos da própria Natureza.

Na Matemática Grega Antiga, a Logística era menos importante que a Aritmética. Entretanto, a Matemática Grega reinterpretada nos séculos XVI e XVII por Stevin, Vieta e Descartes, teve inversão de polo, ou seja, agora a Logística tratada como *arte* é mais importante – a *téchne* domina a *epistéme*, diferentemente da época Platônica em que a *epistéme* dominava a *téchne*.

Nesse período, mudanças socioculturais se acentuaram, como por exemplo, nas cidades ascendentes da Itália, Holanda e Inglaterra, as cooperações ampliaram entre os novos grupos sociais como dos humanistas e dos acadêmicos das universidades de um lado e dos engenheiros e artesãos, do outro. Nesse novo cenário a relação entre *epistéme* e *téchne* também mudou, nascendo o domínio da *téchne* sobre *epistéme*, e este foi uma das causas da Revolução Científica no século XVII. Já nos anos de 1940 Edgar Zilsel sustenta a tese de que a ciência moderna surgiu no século XVI, no momento em que as barreiras sociais entre os três estratos de intelectuais: acadêmicos da universidade, humanistas e artesãos emigraram por causa da ascensão das cidades e do capitalismo de livre comércio. A transformação de suas capacidades intelectuais amalgamaram em um empreendimento cultural único chamado de "ciência moderna" (veja Zilsel, E., *Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft*, Herausgegeben von Wolfgang Krohn, Frankfurt: Suhrkamp Verlag 1976).

Uma das característica dessa revolução foram novas aplicações da Matemática no comércio, na navegação e na fabricação de navios (Stevin, por exemplo tratava dentre outras coisas, de construção de pontes e é considerado o "inventor" do sistema decimal) e na mineração (produção de "dinheiro" (prata)). Dessa forma, a ascensão da mecânica foi considerada *arte*, ou seja, *téchne*, que segundo Aristóteles é o lugar da ciência do ponto de vista das novas aplicações da Matemática. Portanto, são mudanças técnicas e também sociais que causaram esta transformação no entendimento dos conceitos matemáticos e, por conseguinte na função de conhecimento com características instrumentais voltadas para aplicações.

O foco principal, nesse período, também era resolver problemas que os Antigos não resolveram e, também com intento de apresentar soluções gerais para determinado grupo de problemas. Essa transformação de polo nos conceitos da Matemática desencadeou por um lado "*avanços,*" no sentido, por exemplo, da superação da visão contemplativa dos conceitos matemáticos e a percepção da importância das tecnologias (prensa), e por outro lado, "*retrocesso"*, no que diz respeito à perda do Pensamento Relacional (Descartes e Stevin, por exemplo, não trata o número como conceito de relações) e a restrição positivista das ciências.

Portanto, nossa empreitada, neste momento, é compreender o processo de reinterpretação da renovação da doutrina numérica Grega sob a luz do contexto histórico da época, mesmo sabendo que isso não é tão simples, porque as concepções desses últimos quatro séculos estão enraizadas em nossa mente, ou seja, temos dificuldades de lidar com a intencionalidade que há na relação/tensão entre método e objeto, no sentido de perceber e mentalizar as diferenças de conceitualização Antiga e Moderna no que diz respeito a linguagem e o conteúdo dessa linguagem no início do Simbolismo Algébrico Moderno.

Dessa forma, abordamos: duas resoluções de equações, a resolução do primeiro problema do livro I de Diophantus praticada no início da Idade Moderna em que mostra a necessidade do objeto matemático na sua resolução, pois até então, o método depende do objeto. A seguir, tratamos da resolução do problema do livro I de Diophantus por Vieta. Entendemos que na Matemática há uma *tensão* entre as seguintes perspectivas de seus objetos: a téchne, o método, a generalização e a Logística que preocupam com cálculos práticos e resolução de problemas. E, de outro lado: a *epistéme*, o objeto, a justificação e a Aritmética respectivamente, que estão preocupados com os fundamentos da Matemática. A partir da análise dessas resoluções fundamentadas no pensamento oteano (1993) em que considera a Matemática como atividade, bem como com a concepção de Klein (1992) sobre *tensão* entre método e objeto, sinalizaremos para uma reflexão no que diz respeito ao fato de que no início do Simbolismo Algébrico Moderno está presente a transição entre a noção descritiva para noção operativa dos conceitos matemáticos.

2. A presença de tensões no estabelecimento de conhecimentos matemáticos

Para tratar das tensões que estão presentes na consolidação de conceitos matemáticos vamos analisar resoluções de problemas realizadas pelos egípcios, Diophantus e Vieta.

No livro História da Matemática na sala de aula de Helder Pinto há resolução de vários problemas por meio do método egípcio de falsa posição em que mostra como as equações eram resolvidas até o final do século XV. Vamos analisar duas dessas resoluções no sentido de perceber que nesse período as resoluções de equações estavam condicionadas e dependentes do objeto, ou seja, no método há necessidade de se trabalhar com o objeto. E, isso dificulta a operacionalização de conceitos.

Problema 1 – "Uma quantidade e a sua quarta parte somadas perfazem 15. Qual é a quantidade?"

Para resolver este problema o escriba da época utilizava uma técnica chamada de falsa posição, onde assumia, por hipótese, que a quantidade procurada era 4, ou seja, a solução da situação proposta é 4. Em seguida, fazia a calculação para verificar o valor encontrado. Veja:

$$4+\frac{1}{4}\times 4=5$$

Partindo do resultado encontrado, que neste caso é 5 e não 15, ou seja o número 4 não é solução do problema, então o escriba aplicava uma espécie de fator de correção. Para obter 15, que é o valor desejado, o calculista tem que multiplicar o 5 por 3 (3 é o fator de correção). Dessa forma, podemos multiplicar o valor assumido 4 por 3 também (4x3=12). Então, o valor 12 resultante dessa manipulação é solução da situação. A seguir fazia a verificação para confirmar a resposta encontrada. Então: $12+\frac{1}{4}\times 12=15$.

Problema 2 – "uma quantidade e a sua sétima parte adicionadas perfazem 19. Qual é a quantidade?"

Neste problema, o escriba utilizava o número 7 como possível resposta, a seguir fazia a verificação. Veja: $7+\frac{1}{7}\times 7=8$. De posse desse resultado, que não é o esperado aplica-se o fator de correção. Neste caso, o fator de correção é $\frac{19}{8}$, pois esse número multiplicado por 8 resulta 19. Então, a solução dessa situação será $7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$. Finaliza a resolução fazendo a verificação. Observe que a solução da equação será obtida pela multiplicação do número referente à falsa solução pelo fator de correção. Agora, por quais motivos, os calculistas da época utilizaram o 4 e o 7 como falsas soluções nos problemas 1 e 2 apresentadas? Presume-se que esse artifício era utilizado para evitar manipulações com frações.

No livro I da Aritmética de Diofanto há vários problemas resolvidos de forma detalhada. Vamos utilizar um desses problemas para tentar verificar como a transformação no conceito de Arithmo Grego Antigo possibilitou, nas mãos de Vieta, por exemplo, o surgimento da Álgebra Simbólica Moderna.

Segundo (HEAT, 1910, p. 131), o problema é apresentado da forma: To divide a given number into to two having a given difference[4].

> De acordo com (GIL, 2001, p. 75), Diophantus toma 100 como número dado e 40 como a diferença dada entre as partes. Resolve o problema considerando que o número menor era 1 *arithmo;* portanto, o maior número era 1 *arithmo* mais 40 unidades. Como consequência, a soma destes dois números era 2 *arithmos* mais 40 unidades. Associando termos semelhantes a termos semelhantes, obteve 2 arithmos igual a 60 unidades e, portanto, o arithmo valia 30 unidades. Assim os números procurados eram 30 e 70[5].

Nessa resolução apresentada, verificamos que o valor 100 e 40 são considerados condições necessárias na resolução desse problema específico, ou seja, em Diophantus não há preocupação em generalizar procedimentos de resolução, que é um dos méritos dos séculos XVI e XVII. Por outro lado, esse método pode ser generalizado, ou seja, pode ser aplicado em situações similares. No que diz respeito à letra para representar números desconhecidos – isso está implícito no trabalho de Diophantus, no momento em que o número procurado é considerado como 1 arithmo. Contudo, em Diophantus o método de resolução também depende do conhecimento do objeto, ou seja, manipula mais objeto do que conceito.

[4] Dividir um número dado em dois números em que a diferença também é dada.

[5] Essa resolução de Diophantus encontra-se também em (KLEIN, 1992, p. 330).

Na resolução apresentada por Viète desse mesmo problema, em sua logística especiosa[6], segundo (GIL, 2001, p. 75 e 76), Observe:

> Vieta tomou *B* como a diferença entre as duas raízes e *D* como a sua soma. Repare-se na completa generalidade da abordagem de Vieta, fruto da *logística especiosa,* enquanto que a *logística numérica* tinha forçado Diophantus a escolher valores particulares (40 para a diferença e 100 para a soma).
>
> Considerando *A* a menor valor[7], o maior valor era $A + B$. Logo, a soma das raízes era $2A + B$ e*,* portanto, $2A + B$ era igual a *D.* Por transposição, *2A* era igual a *D-B* e, dividindo ambos os membros por 2, *A* era igual a $\frac{D}{2}-\frac{B}{2}$. Vieta considerou ainda que, se *E* fosse o maior valor, o menor valor era *E - B.* Logo, a soma dos valores era 2*E-B* e, portanto, 2*E -B* era igual a *D.* Por transposição, *2E* era igual *a* $D + B$ e, dividindo ambos os membros por 2, *E* era igual a $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}$. Vieta concluía assim que se podiam encontrar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Com efeito,
>
> A metade da soma das raízes menos a metade da sua diferença é igual a menor raiz; e as mesmas adicionadas é a maior raiz.
>
> Vieta terminou exemplificando numericamente a solução encontrada. Tomando *B* igual a 40 e *D* igual a 100, *A* seria igual a 30 e *E* a 70[8].

A escolha dos números 40 e 100 para verificar solução do problema indicam a ligação de Vieta à *Aritmética* de Diophantus, pois são os mesmos que foram usados pelo matemático de Alexandria na resolução deste problema.

Na resolução apresentada por Vieta está presente o início da manipulação de símbolos como representante de valores desconhecidos. Essa manipulação que teve origem em Diophantus é um dos pontos de partida de Vieta no que diz respeito ao começo do Simbolismo Algébrico Moderno, ou seja, em Vieta, o método começa a separar do objeto. Isso significa que o método não depende do conhecimento do objeto. Agora, o elo entre a logística numérica de Diophantus e a logística especiosa de Vieta numa perspectiva de intencionalidade atual pode corroborar na compreensão das dificuldades do ensino do pensamento algébrico na atualidade.

Contudo, compreender o método suscita associar a *epistéme*. Isso significa que mesmo nas técnicas egípcias de resolução de equações, nos procedimentos de Diophantus e em Vieta

[6] Logística especiosa – trabalha com espécie genérica, ampliando a concepção logística numérica de Diophantus que utilizava números.

[7] Segundo a logística especiosa, Vieta designava as quantidades desconhecidas por vogais.

[8] Essa resolução de Vieta encontra-se também em (KLEIN, 1992, p. 331).

há uma espécie de "*ente*" organizador que faz com que escolhemos o método adequado na resolução de cada situação problema apresentada. Agora, qual é a relação entre a *téchne* e a *epistéme* na organização do método? Será que temos aqui o aspecto intuitivo Kantiano? Como criar novos métodos/técnicas diferenciados para designar a mesma *epistéme*?

Podemos dizer que nos diagramas de resoluções há tensão entre método e objeto, pois, temos algoritmos (*métodos*) que são possibilidades de expressar de forma notável a aplicação de certo conceito. Mas, o que significa esses algoritmos expressarem o mesmo conceito?

A sequência de passos na resolução das situações apresentadas tem, de forma geral, características similares. Porém, cada procedimento indica a mesma estrutura relacional, permitindo afirmar que pode haver leis e teoremas que regem a diversidade de formas diferentes de resolução. Portanto, o desafio é acessar por meio da intuição, novos métodos, novas tecnologias, novos algoritmos no sentido de expressar o mesmo conceito, pois o algoritmo isoladamente não fornece nenhuma explicação.

Se um aluno elabora um método de resolução de uma maneira bem rudimentar e mesmo nessa suposta precariedade podemos perceber, visualizar ou mentalizar, bem como associar com a lei geral de processos, então podemos dizer que esse fato propicia aos Platonistas conceber que as leis e as ideias são independentes, universais e eternas.

Procurando entender como se dá a compreensão da relação objeto e método encontramos em Kant (1997, B 74-75) o seguinte:

> O nosso conhecimento provém de duas fontes fundamentais do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objecto mediante estas representações (espontaneidade de conceitos); pela primeira é-nos *dado* um objecto; pela segunda é *pensado* em relação com aquela representação (como simples determinação do espírito). Intuição e conceitos constituem, pois, os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que nem conceitos sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceitos podem dar um conhecimento. Ambos estes elementos são puros ou empíricos. *Empíricos*, quando a sensação (que pressupõe a presença real do objecto) está neles contida; *puros*, quando nenhuma sensação se mistura à representação. A sensação pode chamar-se matéria do conhecimento sensível. Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objecto em geral. Apenas as intuições ou os conceitos puros são possíveis *a priori*, os empíricos só *a posteriori*. Se chamarmos *sensibilidade à receptividade* do nosso espírito em receber representações na medida em que de algum modo é afectado, o *entendimento* é, em contrapartida, a capacidade de produzir representações ou a *espontaneidade* do conhecimento. Pelas condições de nossa natureza a intuição nunca pode ser senão *sensível*, isto é, contém apenas a maneira pela qual somos afectados pelos objetos, ao passo que o entendimento é a capacidade de *pensar* o objecto da intuição sensível. Nenhuma dessas qualidades tem

> primazia sobre a outra. Sem a sensibilidade, nenhum objecto nos seria dado; sem o entendimento, nenhum seria pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios; intuições sem conceitos são cegas.

A Matemática, como qualquer outra área do conhecimento, é influenciada pela complementaridade de reação (receptividade das impressões) e ação (espontaneidade dos conceitos). Entendemos que há uma tensão dialética[9] complementar entre o processo de construção e o conceito na resolução das situações apresentadas.

Agora, de onde "tiramos" o processo? E o conceito? Como relacionar métodos e conceitos? E vários métodos com o mesmo conceito? Será que é da necessidade prática ou é uma inquietação inerente da intuição? Ou de ambos? A "criação" de um método seja nos egípcios, Diophantus e principalmente em Vieta que evidencia generalização por meio de manipulações de quantidades desconhecidas não avançam em função dos conceitos envolvidos (igualdade, número desconhecido, etc.). Isso caracteriza tensão entre objeto e método na construção desses conceitos, bem como na construção de métodos que indicam as instâncias de cada *epistéme*.

> Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade, como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto se diferencia do outro como o abrange, então, é preciso, colocar a *atividade* como a essência da relação sujeito-objeto, procurando descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Essa dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os métodos e os objetos do conhecimento (OTTE, 1993, p. 224).

Como os problemas matemáticos não indicam o caminho nem a forma de obtenção dos procedimentos de sua solução, então surge sempre aspecto contingente e não determinado na evolução do conhecimento matemático.

Dessa forma, tanto na logística de calculação como na possibilidade de generalização do *método* há uma complementaridade entre a *téchne* e a *epistéme*. Sendo que a *epistéme* nos permite pensar em termos intuitivos em técnicas que a princípio não tem nada a ver com o objeto pretendido, porém, possibilita elaborar diagramas (nesse sentido fazemos experiências) para visualizar ou perceber por meio dos órgãos sensoriais o objeto pensado, ou seja, "materializamos" o objeto matemático.

[9] A tensão dialética aqui é interpretada como tentativa de entender concepção opostas na perspectiva de complementaridade e não de oposição.

Na relação *epistéme* e técnica há uma complementaridade evidenciando a *atividade* como elo dessa tensão. Agora, de onde tiramos a *atividade* que propicie o entendimento do processo e do conceito? A sensibilidade para elaborar a *atividade* depende da capacidade de pensar sobre essa *atividade* e vice-versa.

O aspecto da presença de tensões no estabelecimento de conceitos matemáticos não tem caráter negativo e sim aspectos positivos, pois, os objetos matemáticos, como por exemplo, número e figuras passam por transformações conceituais em função do contexto histórico de sua utilização, necessitando de novos métodos e nessa reflexão a forma de abordar o conceito também se transforma, ou seja, tanto a *téchne* como *epistéme* se transforma, produzindo novas interpretações dos conceitos matemáticos. Por isso, o estudo histórico e epistemológico também é muito importante.

3. Tensões Presentes no Pensamento Matemático Grego e na Origem da Álgebra na Perspectiva de Jacob Klein

Na obra de Klein (1992) está evidenciado que na Matemática Grega Antiga, assim como na transição entre essa Matemática e a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno nos séculos XVI e XVII, verificam-se tensões dialéticas e complementares entre método e objeto caracterizado na relação *epistéme* e *téchne*.

> O conhecimento e a cognição na perspectiva da *epistém*e grega foram reconhecidos pela primeira vez como última possibilidade humana, que permite ao homem desconsiderar todos os fins que poderiam perseguir, para dedicar-se à contemplação em completa liberdade e de lazer, encontrando sua felicidade em sua própria atividade (KLEIN, 1992, p. 118. Nossa Tradução).

Enquanto no mundo aristotélico, a Natureza foi o grande produtor/artífice e a ciência aristotélica propõe a descobrir os objetivos e as causas da Natureza. A cultura cristã é dominado pela ideia de um Deus pessoal, fora do mundo natural e Newton acreditava que os seres humanos tinham que seguir o exemplo de Deus como o maior artífice. Esta personalização levou o domínio do instrumentalismo na ciência. Nós, humanos, construímos máquinas para servir nossos interesses e desejos. A mecânica de Aristóteles era uma *arte*, que tornou no decorrer do século XVII, uma ciência de grande importância.

Assim, a ciência e a Matemática torna-se conectada com a ideia de funcionalidade a serviço dos humanos. A máquina serve para realizar alguma função de interesse dos homens, mas não explica nada, pois trata-se de um algorítmo. Em face do fato da realidade ser demasiadamente complexa, tendo uma espécie de ruído aleatório; então a tecnologia e o método serve primeiro como uma orientação científica ou cognitiva indispensável.

> Homens como Galileu, Kepler, Stevin e Descartes são motivados por um impulso original, que é bastante estranho para a ciência escolástica (ciência aristotélica, nossa inserção). O interesse científico destes homens e de seus precursores se acendeu em sua maioria por problemas da mecânica aplicada e óptica aplicada, por problemas de arquitetura, construção de máquinas, da pintura e do recém-descoberto óptica instrumental (KLEIN, 1992, p. 119. Nossa Tradução).

Mas, certamente, não havia apenas contraste e oposição entre a ciência grega Antiga e a Nova, porque, como sabemos, pelo menos foi a redescoberta e a reinterpretação das conquistas científicas e matemáticas gregas, que trouxeram a revolução científica nos séculos XVI e XVII. Mesmo que a nova ciência se propõe a atingir objetivos muito diferentes do quadro conceptual das ideias dos "revolucionários" é derivado do conceito tradicional de ciência aristotélica e escolástica. A reivindicação da verdadeira ciência, do verdadeiro conhecimento induz a necessidade de reorientação contínua por referência ao edifício tradicional firmemente consolidada da ciência *(*KLEIN, 1992, p. 119. Nossa Tradução).

Portanto, o desenvolvimento da nova ciência e Matemática foi influenciado por uma visão de complementaridade dos fins teóricos e pragmáticos, por uma dualidade de aspectos descritivos e instrumentais, e consequentemente por uma interação entre *epistéme* e *téchne*. A expressão mais característica da ligação acima (do tipo de generalização e o personagem como *arte* e tecnologia da nova matemática, nossa inserção) encontra-se no formalismo simbólico e nas técnicas de cálculo da Matemática Moderna (KLEIN, 1992, p. 122. Nossa Tradução).

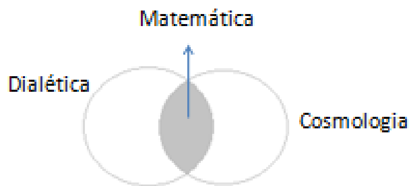
Neste ensaio vamos apresentar dois momentos em que Klein expressa no seu livro essas *tensões*. O primeiro momento dessa tensão aparece na concepção ontológica de arithmo em Platão que é um capítulo do livro de Klein, onde há um subtítulo que trata da Matemática em Platão (Logístike e Dianóia[10]). Nesse capítulo, Klein afirma que não há dúvida que a Filosofia Platônica, ou seja, as reflexões sobre Aritmética e Logística foi influenciada pela concepção Pitagórica.

No entanto, há *tensão* entre essas duas filosofias, enquanto a Filosofia Pitagórica é uma ontologia do cosmos (mundo sensível), uma doutrina que diz respeito ao modo de ser do mundo e das coisas contidas nele, assegurando particularmente que a ciência Aritmética e

---

[10] Dianóia – faculdade e atividade do pensamento.

Logística constitui verdadeiros objetos do mundo (KLEIN, 1992, p. 66. Nossa Tradução). Já no caso da Filosofia Platônica, a concepção de números é totalmente diferente da perspectiva Pitagórica, ou seja, há aspectos teóricos (arithmos puros separado do mundo sensível) e aspectos práticos que lida com cálculos e operações diárias. Segundo Klein, nossa tradução, o aspecto dialético (ciência pura) e a cosmologia, em Platão, têm uma espécie de "fronteira"[11] que une e afeta ambos de forma que a tensão amplia a concepção dos objetos matemáticos. Para Platão essa fronteira é a Matemática. Veja o diagrama:



O segundo momento de tensão que evidencia a relação entre *epistéme* e *téchne* na perspectiva da relação complementar entre objeto e método está no capítulo que trata da diferença entre a conceitualização Antiga e Moderna.

> Na Matemática Antiga há uma insuficiência distinção entre generalidade do método e generalidade do objeto de investigação. A álgebra geométrica (magnitude geral) é um método geral que tem como objeto a magnitude geral. Portanto, todos os problemas complexos apresentados pelos Antigos em função de seu interesse científico foram centrados em questões relativas ao modo de ser dos objetos matemáticos. A Matemática Antiga é caracterizada pela *tensão entre método e objeto***.** O *objeto* em questão (figuras e curvas geométricas, relações, proporções de magnitudes geométricas comensuráveis e incomensuráveis, números, razões etc.) são ambos os pontos de partida e de chegada. A maneira de determinar o *método* de investigação é mostrada especialmente no caso de "existência" de provas, isto é, demonstração de que o "ser" de certo objeto é possível porque é desprovido de autocontradição. O problema de aplicabilidade geral de um *método* é, portanto, para os Antigos o problema da generalização dos *objetos* da Matemática em si. E este problema eles podem resolver somente na perspectiva de uma ontologia de *objetos* matemáticos (KLEIN, 1992, p. 122. Nossa Tradução).

Portanto, a Matemática Antiga Grega, lida com objetos matemáticos do ponto de vista descritivo considerando-o como começo, meio e fim. Isso é uma dificuldade, pois a generalização e justificação tornam-se dependentes do objeto. Ao mesmo tempo em que o

[11] Entendemos que essas fronteiras não são bem determinadas como sugere o diagrama.

método[12] depende do objeto, na Matemática Antiga Grega, prevalece o domínio da *epistéme* sobre a *téchne*, ou seja, por um lado temos o arithmo associado à quantidade de coisas definidas (*téchne*) e também o próprio arithmos relacionados também com monadas puras (*epistéme*).

Esse "jogo" hierárquico ascendente linear entre arithmo prático e puro foi reinterpretado no início da Matemática Moderna nos séculos XVI e XVII, ou seja, a ideia de arithmo como quantidade de coisas definidas e o pensar sobre o significado dessa quantidade de coisas, propiciou a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno na perspectiva de Vieta e depois Descartes.

Na transformação do conceito de arithmos, no início da Matemática Moderna, a atenção volta-se para o *método* como início e fim. Agora, a busca é por um *método geral* de resolução dos problemas Antigos que os Gregos não conseguiram resolver. Essa priorização do *método* ganha força, no momento em que, as técnicas (arte logística - *téchne*) começam a possibilitar construções de aparelhos para realização de experiências ampliando a visão científica do mundo.

Nessa reinterpretação da Matemática Grega, a estrutura dos objetos da Matemática (o conceito de arithmos) se modifica também, surgindo uma nova ciência, tendo no Simbolismo Algébrico papel central de sua transformação.

4. Considerações finais

Observamos que no método de falsa posição dos egípcios, os procedimentos de Diophantus e o método de Vieta indicam transição do aspecto descritivo para o operativo na construção de conceitos por meio de *atividades*, que é segundo o pensamento oteano, a essência da Matemática. A Educação Matemática não pode abster de uma reflexão histórica e epistemológica no que diz respeito ao desenvolvimento de significados dos objetos matemáticos. Nesse sentido, a Educação deve ser fundamentada no conhecimento científico especialmente na relação complementar entre a *téchne* e *epistéme* na compreensão dos métodos e conceitos com que a Matemática lida. Nosso propósito neste momento, não é finalizar essa análise, porém suscitar novos questionamentos acerca da importância da

[12] Segundo (OTTE, 1993, p. 225), as relações entre objeto e método estão conectadas e ao mesmo tempo se opõe. A Matemática generaliza e constrói novos conceitos por um lado e por outro lado os problemas não produzem por si só os métodos para sua solução.

transição do aspecto descritivo/contemplativo para o aspecto operativo/instrumental nos conceitos matemáticos ocorrido nos séculos XVI e XVII com o objetivo de interpretar a Origem do Simbolismo Algébrico Moderno em relação à manipulação de grandezas desconhecidas. Dessa forma, ficamos com apenas essas situações, porém há outros que estamos analisando.

Entendo que essa transição do aspecto contemplativo/interpretativo, onde o conceito matemático é um espelho, uma reflexão do mundo, determinado pelos seus objetos, de forma que cada objeto pode ser representado pelo seu arithmo, ou seja, o *objeto* determina o *método* para o surgimento do representativo/operativo onde tudo se aplica a representações das coisas e não a coisa em si – os conceitos, os símbolos são considerados instrumentos e, por conseguinte o método é mais importante que o objeto. Nesse sentido, os números começam a representar relações entre objetos e não objetos.

Contudo, a polarização de interpretação não é coerente com o conceito de complementaridade. Então, a *atividade* considerada como experiência na forma de diagramas (método de resolução dos egípcios, Diophantus e Vieta) possibilita tanto discretizar, generalizar e justificar, ou seja, os conceitos matemáticos para serem compreendidos precisam considerar a dinâmica da atividade entre a *téchne* e a *epistéme* como entidade independente. Podemos dizer que a generalização do método e a generalização do objeto são de naturezas diferentes que se complementam entre si no momento de representar um conceito. Então, elaborar, criar, descobrir ou interpretar *atividades* elaboradas no decorrer da História da Matemática pode possibilitar generalização e justificação, que é o nosso objetivo no que diz respeito ao estudo da compreensão dos objetos de estudo da Educação Matemática.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BRANN, Eva. Jacob Klein’s Two Prescient Discoveries. **The St. John’s Review**, Annapolis, n.1, v.52, 2010. Disponível em: http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml. Acesso em 01de março de 2011.

_______Klein on Myth of Learning. **The St. John’s Review**, Annapolis, n.1, v.51, 2009. Disponível em: http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml. Acesso em 01de março de 2011.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète: o despontar da álgebra simbólica**. Porto: Faculdade de Ciências da Unicersidade do Porto - Departamento de Matemática Pura, 2001. Dissertação de Mestrado em Matemática – Fundamentos e Aplicações. Disponível em: <repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/.../3596_TM_01_C.pdf> Acesso 27 de fevereiro de 2011.

HEALT, Sir Thomas. **Diophantus of Alexandria: A Study the History of Greek Algebra**. 2ª ed. New York: Dover Publications, 1964.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura**. Traduzido por Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 4ª ed. Lisboa: Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian, 1997, p.670.

KLEIN, Jacob. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra**. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

MALBERRY, J. P. **The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets**. Disponível em: http://www.bristol.ac.uk/philosophy/department/staff/jpm/preface.pdf. Acesso em 01de abril de 2011.

OTTE, Michael. **O Formal, O Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.

PINTO, Helder. **História da Matemática na Sala de Aula**. 2ª ed. Lisboa – Portugal: Ludus, 2011.

ZILSEL, E. **Die sozialen Ursprünge der neuzeitlichen Wissenschaft**, Herausgegeben von Wolfgang Krohn, Frankfurt: Suhrkamp, 1976.